3. Моисеев Н. Н. *Асимптотические методы нелинейной механики.* – М.: Наука, 1981. – 400 с.

4. Гребеников Е. А. *Метод усреднения в прикладных задачах.* – М.: Наука, 1986. – 256 с.

ON REGIMES OF CHAOTIC OSCILLATIONS FOR A SOLUTION OF THE DUFFING EQUATION

A.F. Kurin

In this paper, the existence of regimes of chaotic oscillations for a solution of the inhomogeneous Duffing equation, without attenuation, with a small nonlinearity and a small amplitude of the external periodic force, is proved. A relation connecting the parameters of the equation is derived, which ensure the tuning of the Duffing oscillator to the considered regimes.

Keywords: averaging method, oscillator, bifurcations.

УДК 512.579

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ГРАДУИРОВАННЫХ ИДЕАЛОВ ПОЛУГРУППОВЫХ C^*–АЛГЕБР

Е.В. Липачева[1], Т.А. Григорян[2]

1 *elipacheva@gmail.com*; Казанский государственный энергетический университет
2 *tkhorkova@gmail.com*; Казанский государственный энергетический университет

В статье продолжается начатое ранее исследование C^*–алгебры, порожденной левым регулярным представлением абелевой полугруппы. Изучаются идеалы этой C^*–алгебры, инвариантные относительно представления компактной группы G в группе автоморфизмов рассматриваемой алгебры. Доказывается, что инвариантность идеала равносильна тому, что он является градуированной C^*–алгеброй. Отдельно изучается класс примитивных градуированных идеалов, порожденных одним проектором.

Ключевые слова: C^*–алгебра, градуированная C^*–алгебра, полугруппа, левое регулярное представление, инвариантные подпространства, представление в группе автоморфизмов, инвариантный идеал, коммутаторный идеал.

В работах [1,2] было начато исследование C^*–алгебры, порожденной регулярным изометрическим представлением абелевой полугруппы S, так называемой приведенной полугрупповой C^*–алгебры $C^*_{red}(S)$, которую можно рассматривать как естественное обобщение алгебры Теплица. В частности, было доказано, что C^*–алгебра $C^*_{red}(S)$ является градуированной C^*–алгеброй, были описаны некоторые свойства этой алгебры, было начато исследование ее идеалов и автоморфизмов. В настоящей работе продолжено исследование идеалов C^*–алгебры $C^*_{red}(S)$, инвариантных относительно представления компактной группы G в группе автоморфизмов $\mathrm{Aut}(C^*_{red}(S))$.

Пусть S — аддитивная абелева полугруппа с сокращением, содержащая нейтральный элемент. Рассмотрим гильбертово пространство

$$l^2(S) = \{f : S \to \mathbb{C} \, : \, \sum_{a \in S} |f(a)|^2 < \infty\}$$

со скалярным произведением $(f,g) = \sum\limits_{a\in S} f(a)\overline{g(a)}$. Семейство функций $\{e_a\}_{a\in S}$, $e_a(b) = \delta_{a,b}$ образует ортонормированный базис в $l^2(S)$.

Рассмотрим представление $\pi : S \to B(l^2(S))$ полугруппы S в алгебру операторов на $l^2(S)$, заданное следующим образом: $\pi(a)e_b = e_{a+b}$. Очевидно, оператор $\pi(a)$ является изометрией и представление π является изометрическим представлением полугруппы S. Будем обозначать операторы $\pi(a)$ через T_a, $a \in S$.

Представление π называется *левым регулярным представлением* полугруппы S.

C^*–алгебра, порожденная левым регулярным представлением полугруппы S, обозначается $C^*_{red}(S)$ и называется *приведенной полугрупповой C^*–алгеброй полугруппы S*.

Операторы вида T_a и T_a^* называются *элементарными мономами*, а конечное произведение элементарных мономов — *мономом*.

Пусть Γ — *группа Гротендика*, порожденная полугруппой S. С помощью группы Гротендика вводится понятие индекса монома следующим образом.

В работе [2] было показано, что если V — моном из S^*_{red}, то найдутся такие элементы $a, b \in S$, что

$$\varinjlim_{c\in S} T_c^* V T_c = T_a^* T_b,$$

где $\varinjlim\limits_{c\in S}$ — предел по направлению S. Тогда *индексом монома V* называется элемент $b-a$ группы Γ. При этом используется обозначение $\mathrm{ind} V = b-a$.

Понятие индекса монома позволяет построить градуировку алгебры $C^*_{red}(S)$ по группе Γ. Обозначим через $\mathfrak{A}_c$ замкнутое линейное подпространство в $C^*_{red}(S)$, порожденное линейными комбинациями мономов индекса c, $c \in \Gamma$. Тогда C^*–алгебра $C^*_{red}(S)$ является Γ–градуированной C^*–алгеброй [2]

$$C^*_{red}(S) = \overline{\bigoplus_{c\in\Gamma} \mathfrak{A}_c},$$

где $\mathfrak{A}_c = T_b^* \mathfrak{A}_0 T_a$ для $c = a-b$, $\mathfrak{A}_0$ — коммутативная подалгебра, и каждый элемент $A \in C^*_{red}(S)$ представляется в виде формального ряда: $A \simeq \sum\limits_{c\in\Gamma} A_c$, где $A_c \in \mathfrak{A}_c$.

Пусть K — *коммутаторный идеал* алгебры $C^*_{red}(S)$, т.е. идеал, порожденный коммутантами $AB - BA$, где $A, B \in C^*_{red}(S)$. Идеал K также является Γ–градуированной C^*–алгеброй.

Поскольку $C^*_{red}(S)$ является Γ–градуированной C^*–алгеброй, то существует представление $\tau : G \to \mathrm{Aut}(C^*_{red}(S))$ такое, что подпространства $\mathfrak{A}_c$ инвариантны относительно этого представления:

$$\mathfrak{A}_c = \{A \in C^*_{red}(S) : \tau(g)(A) = \chi^c(g)A, g \in G\}.$$

Идеал J алгебры $C^*_{red}(S)$ назовем *инвариантным*, если он инвариантен относительно представления $\tau : G \to \mathrm{Aut}(C^*_{red}(S))$, то есть $\tau(g)(J) = J$ для любого $g \in G$.

Лемма 1. *Пусть J — идеал алгебры $C^*_{red}(S)$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1. *J — инвариантный идеал;*

2. *J является* Γ*–градуированной* C^**–алгеброй*

$$J = \overline{\bigoplus_{c\in\Gamma} J_c},$$

где $J_c = J \cap \mathfrak{A}_c$ и $J_c = T_b^* J_0 T_a$, если $c = a - b$. Причем каждый элемент $A \in J$ представляется в виде: $A \simeq \sum\limits_{c\in\Gamma} A_c$, где $A_c \in J_c$.

Таким образом, инвариантность идеала относительно представления τ равносильна тому, что этот идеал является Γ–градуированным. Коммутаторный идеал также является инвариантным идеалом. Нетрудно видеть, что объединение и пересечение инвариантных идеалов снова является инвариантным идеалом. Поэтому все инвариантные идеалы образуют решетку.

Обозначим через $\mathrm{Inv}(S)$ совокупность всех инвариантных идеалов алгебры $C^*_{red}(S)$. Как показывается в следующей теореме, коммутаторный идеал является максимальным элементом в $\mathrm{Inv}(S)$.

Теорема 1. *Коммутаторный идеал K является максимальным идеалом среди всех инвариантных идеалов алгебры $C^*_{red}(S)$.*

Ниже приводится пример полугрупповой C^*–алгебры, имеющей единственный нетривиальный инвариантный идеал — коммутаторный.

Пример 1. *Пусть Γ — аддитивная подгруппа группы вещественных чисел $\mathbb{R}$ и $S = \{a \in \Gamma : a \geq 0\}$. Тогда коммутаторный идеал — единственный инвариантный идеал алгебры $C^*_{red}(S)$.*

Алгебра Теплица $\mathscr{T}$ также содержит единственный нетривиальный инвариантный идеал — идеал компактных операторов (см. [1]).

Как определить, является ли некоторый идеал инвариантным? В следующем утверждении получен критерий инвариантности для идеала, порожденного линейной комбинаций проекторов.

Теорема 2. *Пусть $A = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i W_i$, где $W_1, \ldots, W_n$ — мономы индекса 0, и $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i = 0$. Тогда идеал, порожденный элементом A, является инвариантным.*

Пусть $J = \overline{\bigoplus\limits_{c\in\Gamma} J_c}$ — инвариантный идеал C^*–алгебры $C^*_{red}(S)$. Отметим, что J_0 является коммутативной C^*-подалгеброй и идеалом в коммутативной C^*–алгебре $\mathfrak{A}_0$. В работе [1] было показано, что любой инвариантный идеал J однозначно определяется своей коммутативной подалгеброй J_0. А именно, если $J = \overline{\bigoplus\limits_{c\in\Gamma} J_c}$ и $J' = \overline{\bigoplus\limits_{c\in\Gamma} J'_c}$ — два инвариантных идеала C^*–алгебры $C^*_{red}(S)$, то $J = J'$ тогда и только тогда, когда $J_0 = J'_0$.

Обозначим через $\mathrm{Inv}_0(S)$ множество всех тех идеалов L алгебры $\mathfrak{A}_0$, для которых существует $J \in \mathrm{Inv}(S)$ такой, что $J_0 = J \cap \mathfrak{A}_0 = L$. Отметим, что $\mathrm{Inv}_0(S)$, вообще говоря, не совпадает с множеством всех идеалов алгебры $\mathfrak{A}_0$. Однако, если идеал $L \subset \mathfrak{A}_0$ порождает некоторый собственный идеал J в C^*–алгебре $C^*_{red}(S)$, то он будет инвариантным, причем $L \subseteq J_0$. В следующей теореме приводится критерий принадлежности произвольного идеала алгебры $\mathfrak{A}_0$ классу $\mathrm{Inv}_0(S)$.

Теорема 3. *Пусть* $L \subset \mathfrak{A}_0$ *является идеалом в* $\mathfrak{A}_0$. *Тогда* $L \in \mathrm{Inv}_0(S)$ *тогда и только тогда, когда* $T_a L T_a^* \subseteq L$ *и* $T_a^* L T_a \subseteq L$ *для любого* $a \in S$.

Пусть W — некоторый моном индекса 0. Назовем идеал, порожденный проектором $P_W = I - W$ в алгебре $C^*_{red}(S)$, *примитивным* идеалом. Будем обозначать его I_W. Согласно теореме 2, идеал I_W является инвариантным, а, следовательно, градуированным.

Частным примером примитивного идеала является идеал I_a, порожденный проектором $P_a = I - T_a T_a^*$ для некоторого $a \in S$.

Все идеалы I_W условно можно разделить на два класса: для которых W представляется в виде $W = V T_a^*$, где V — моном индекса a, и для которых W не представляется в таком виде. Идеал I_a относится к первому классу.

Теорема 4. *Если моном* W *представляется в виде* $W = V T_a^*$, *где* V *— моном индекса* a, *то фактор–алгебра* $C^*_{red}(S)/I_W$ *содержит нетривиальный центр.*

В частности, фактор–алгебра $C^*_{red}(S)/I_a$, $a \in S$, содержит нетривиальный центр. Изучим структуру этой фактор–алгебры. Рассмотрим полугруппу

$$S_a = \{b - na : b \in S, n \in \mathbb{Z}_+\}$$

и ее приведенную полугрупповую C^*–алгебру $C^*_{red}(S_a)$. Отметим, что $S \subset S_a$.

Теорема 5. *Имеет место изоморфизм* $C^*_{red}(S)/I_a \cong C^*_{red}(S_a)$, *и короткая последовательность*

$$0 \to I_a \to C^*_{red}(S) \to C^*_{red}(S_a) \to 0$$

точна.

Пусть G — компактная абелева группа характеров группы Γ. Через χ^c будем обозначать характер группы G, соответствующий элементу $c \in \Gamma$. Пусть $C(G)$ – C^*–алгебра всех непрерывных комплекснозначных функций на G, наделенная равномерной нормой $\|f\|_\infty = \sup\limits_G \|f\|$. Обозначим через Γ_a максимальную группу, содержащуюся в S_a. Очевидно, эта группа не тривиальна, так как она содержит элементы $na, -na$ для любого $n \in \mathbb{Z}_+$. Ясно, что $\Gamma_a \subset \Gamma$. Пусть G_a — компактная группа характеров группы Γ_a. Вложение $\Gamma_a \hookrightarrow \Gamma$ порождает гомоморфизм $\varphi : G \to G_a$ такой, что $\varphi(\chi^c) = \chi^c$ для $c \in \Gamma_a$.

Теорема 6. *Имеет место изоморфизм* $\mathbb{Z}(C^*_{red}(S_a)) \cong C^*_{red}(\Gamma_a) \cong C(G_a)$, *где* $\mathbb{Z}(C^*_{red}(S_a))$ *— центр алгебры* $C^*_{red}(S_a)$, *а* $C^*_{red}(\Gamma_a)$ *—* C^**–алгебра, порожденная регулярным представлением группы* Γ_a *на* $l^2(\Gamma_a)$.

Ранее мы рассматривали пример полугрупповой C^*–алгебры, имеющей единственный инвариантный идеал — коммутаторный. Приведем еще один пример полугрупповой C^*–алгебры, имеющей два инвариантных идеала: коммутаторный и идеал компактных операторов. Кроме того, этот пример показывает, что если моном W не представляется в виде $W = V T_a^*$, где V — моном индекса a, то фактор–алгебра $C^*_{red}(S)/I_W$ не обязана иметь нетривиальный центр.

Пример 2. *Пусть* $S = \{a \in \mathbb{R} : a \geq 1\} \cup \{0\}$. *Идеал алгебры* $C^*_{red}(S)$, *порожденный проектором* $I - T^*_{1+\alpha} T_1 T_1^* T_{1+\alpha}$, *где* $0 < \alpha < 1$, *совпадает с алгеброй компактных операторов* $K(l^2(S))$ *и является инвариантным идеалом в* $C^*_{red}(S)$. *Имеет место изоморфизм*

$C^*_{red}(S)/K(l^2(S)) \cong C^*_{red}(\mathbb{R}_+)$ *и, как следствие, короткая последовательность*

$$0 \to K(l^2(S)) \to C^*_{red}(S) \to C^*_{red}(\mathbb{R}_+) \to 0$$

точна.

Следствие. *Алгебра $C^*_{red}(S)$, где $S = \{a \in \mathbb{R} : a \geq 1\} \cup \{0\}$, имеет только два инвариантных идеала — коммутаторный и идеал компактных операторов.*

Литература

1. Григорян С. А., Салахутдинов А. Ф. *C^*–алгебры, порожденные полугруппами с сокращением* // Сиб. матем. журн. – 2010. – Т. 50. – № 1. – С. 16—25.

2. Аухадиев М. А., Григорян С. А., Липачева Е. В. *Операторный подход к квантованию полугрупп* // Матем. сб. – 2014. – Т. 205. – № 3. – С. 15—40.

ON A CLASS OF GRADED IDEALS OF SEMIGROUP C^*–ALGEBRAS

E.V. Lipacheva, T.A. Grigoryan

The article continues the previously initiated research of the C^*–algebra generated by the left regular representation of an Abelian semigroup. We study invariant ideals of this C^*–algebra invariant with respect to the representation of a compact group G in the automorphism group of this algebra. It is proved that the invariance of the ideal is equivalent to the fact that this ideal is a graded C^*–algebra. It is studied a class of graded primitive ideals generated by a single projector.

Keywords: C^*–algebra, graded C^*–algebra, semigroup, left regular representation, invariant subspaces, representation in the automorphism group, invariant ideal, commutator ideal.

УДК 517.956

РАЗМЕРНОСТЬ ПРОСТРАНСТВ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА И ВАРИАЦИИ ПОТЕНЦИАЛА

А.Г. Лосев[1]

1 *allosev59@gmail.com*; Волгоградский государственный университет

Работа посвящена изучению решений стационарного уравнения Шредингера $\Delta u - q(x)u = 0$ на некомпактных римановых многообразиях. А именно, рассматривается вопрос изменения размерности пространства ограниченных решений данного уравнения при различных вариациях потенциала $q(x)$. В частности, показано, что уменьшение потенциала $q(x)$ не уменьшает размерности пространства ограниченных решений данного уравнения.

Ключевые слова: стационарное уравнение Шредингера, теоремы типа Лиувилля, некомпактные римановы многообразия, массивные множества.

Данная работа посвящена изучению ограниченных решений стационарного уравнения Шредингера

$$Lu = \Delta u - q(x)u = 0 \tag{1}$$